جبر و احتمال — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم عدد زوجی به دست می‌آید.

۲- با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد $P_n = ۱۱^n - ۱$ بر عدد ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳- اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند ، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{a}} + \frac{۱}{\sqrt{b}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۴- می‌دانیم $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ اعدادی گنگ هستند. نشان دهید عدد $\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}}$ نیز عددی گنگ است.

۵- ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال ، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران ، مشهد ، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

۶- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

۷- رابطه R روی مجموعه $R - \{۰\}$ چنین تعریف شده است: $x R y \Leftrightarrow xy > ۰$

الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[-۲]$ را بدست آورید.

۸- مجموعه‌های $A = \{۳^x | x \in N, x \leq ۲\}$ و $B = \{۳x | x \in Z, |x| < ۲\}$ داده شده است.

الف) مجموعه‌های A و B را به صورت اعضا مشخص کنید.

ب) حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

۹- نمودار رابطه زیر را رسم کنید.

$$R = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ \leq ۴, |x-y| \geq ۱\}$$

۱۰- دو مکعب سالم را پرتاب می‌کنیم ، مطلوب است تعیین:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد روشده ۸ شود.

ج) پیشامد B که در آن حاصل ضرب اعداد روشده مضرب ۱۵ شود. د) پیشامد $A - B$

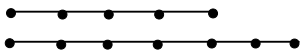
۱۱- ۵ دانش‌آموز درنظر می‌گیریم . احتمال این که روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز هفته نباشد را مشخص کنید.

۱۲- چهار دونده a, b, c, d در یک مسابقه شرکت می‌کنند. فرض کنیم احتمال برنده شدن a سه برابر احتمال برنده شدن b و احتمال برنده شدن b نصف احتمال برنده شدن c و دونده‌های d, c هم شانس باشند. احتمال برنده شدن a یا d را بدست آورید.

۱۳- احتمال آن که در خانه‌ای یخچال باشد برابر ۰/۸۵ و احتمال آنکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر ۰/۴ و احتمال آن که حداقل یکی از دو وسیله یخچال و تلویزیون باشد ۰/۹۶ می‌باشدئ. احتمال آن را بیابید که در این خانه:

الف) تلویزیون باشد ب) فقط یخچال باشد

۱۴- دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند. ار این نقطه‌ها سه نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این سه نقطه رأس‌های یک مثلث باشند را بدست آورید.



۱۵- نقطه‌ای به تصادف درون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی که طول هر ساق آن ۳ سانتی‌متر است انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آن که فاصله این نقطه از هر رأس مثلث بیشتر از ۱ سانتی‌متر باشد.

۱۶- قضیه: ثابت کنید اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، آن گاه : $P(B-A) = P(B) - P(A)$

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

۱-

$x = ۲k + ۱$

$x^۲ + ۱ = (۲k+۱)^۲ + ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۱ = ۲(k^۲ + ۲k + ۱) = ۲t$

۲-

$P(۱): P_۱ = ۱۱^۱ - ۱ = ۱۰ = ۱۰(۱)$ $\qquad$ $P(k): P_k = ۱۱^k - ۱ = ۱۰t$ فرض

$P(k+۱): P_{k+۱} = ۱۱^{k+۱} - ۱ = ۱۰t'$ حکم

طرفین فرض را در عدد ۱۱ ضرب می‌کنیم.

$۱۱^{k+۱} - ۱۱ = ۱۰\,(۱۱t) \Rightarrow$ طبق فرض $۱۱^k - ۱۰ = ۱۰t$

$۱۱^{k+۱} - ۱ - ۱۰ = ۱۰(۱۱t) \Rightarrow ۱۱^{k+۱} - ۱ = ۱۰\,\underbrace{(۱۱t+۱)}_{t'}$

۳-

$$\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \ge \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲ \ge ۴\sqrt{ab} \Rightarrow a+b+۲\sqrt{ab} \ge ۴\sqrt{a+b} \Rightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \ge ۰ \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \ge ۰$$

بدیهی – پس با استفاده از استدلال بازگشتی نامساوی برقرار است.

۴-

$$\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}} \notin Q \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}} \in Q \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}} = a \Rightarrow \sqrt{۷}+\sqrt{۳} = \frac{۱}{a}$$

$$\sqrt{۷} = \frac{۱}{a} - \sqrt{۳} \Rightarrow ۷ = \frac{۱}{a^۲} + ۳ - \frac{۲}{a}\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲}{a}\sqrt{۳}\ \text{گنگ} = \frac{۱}{a^۲} - ۴\ \text{گویا}$$

به تناقض رسیدیم. پس $\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}}$ عدد گنگ است.

۵- روش اول:

کبوتر $\quad ۵۰ \quad ۳ \quad ۱۶ \quad m = ۵۰$

لانه (رشته‌ها) $\quad ۵۰ = ۳ \times ۱۶ + ۲ \quad n = ۳$

حداقل هم رشته‌اند $\quad ۱۶ + ۱ = ۱۷$

کبوتر $\quad ۱۷ \quad ۴ \quad ۴ \quad m = ۱۷$

لانه(رشته‌ها) $\quad ۱۷ = ۴ \times ۴ + ۱ \quad n = ۴$

حداقل هم شهری‌اند $\quad ۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم‌شهری هستند.

روش دوم:

کبوتر $m = ۵۰$

لانه $n = ۳ \times ۴ = ۱۲$

$۵۰ = ۴ \times ۱۲ + ۲$

$۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

۶-

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$
$$= B \cap [(A \cap A') \cup (A \cap C')] = B \cap [\varnothing \cup (A \cap C')] = B \cap (A \cap C') = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C)$$

۷-

$x R x \to xy > ۰ \to x^۲ > ۰$ بدیهی (بازتابی)

$x R y \to xy > ۰ \Rightarrow yx > ۰ \Rightarrow y R x$ (تقارنی)

$\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy > ۰ \\ yz > ۰ \end{cases} \Rightarrow y^۲(xz) > ۰ \Rightarrow xz > ۰ \Rightarrow x R z$ (ترایایی) پس R هم ارزی است.

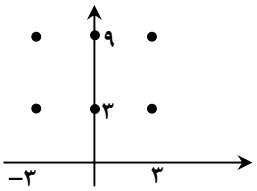
$x R (-۲) \to (-۲)x > ۰ \Rightarrow x < ۰$ (تمام اعداد حقیقی منفی)

۸-

$A = \{۳, ۹\}$

$B = \{-۳, ۰, ۳\}$

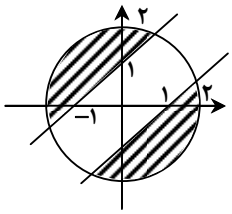
$B \times A = \{(-۳,۳),(-۳,۹),(۰,۳),(۰,۹),(۳,۳),(۳,۹)\}$



۹-

$x - y \geq ۱$ $x - y = ۱$

$x - y \leq -۱$ $x - y = -۱$



۱۰-

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

$B = \{(۳,۵),(۵,۳),(۵,۶),(۶,۵)\}$ $A = \{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

$A - B = \{(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)\}$

۱۱-

$$P(A) = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳}{۷^۵} = \frac{۳۶۰}{۲۴۰۱}$$

۱۲-

$P(a) = ۳P(b)$ $P(b) = \frac{۱}{۲}P(c) \to P(c) = ۲P(b)$

$P(c) = P(d)$ $P(b) = W$

$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱$ $۳W + W + ۲W + ۲W = ۱ \Rightarrow W = \frac{۱}{۸}$

$$P(a) + P(d) = ۳W + ۲W = ۵W = \frac{۵}{۸}$$

۱۳-

A : احتمال یخچال B : احتمال تلویزیون

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۹۶ = ۰/۸۵ + P(B) - ۰/۴ \Rightarrow P(B) = ۰/۵۱$

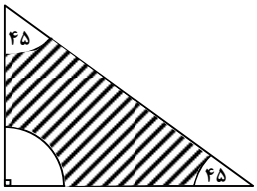
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۸۵ - ۰/۴ = ۰/۴۵$ فقط یخچال

۱۴-

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲} + \binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۵ \times ۲۱ + ۱۰ \times ۷}{۲۲۰} = \frac{۱۷۵}{۲۲۰} = \frac{۳۵}{۴۴}$$

۱۵- از مساحت مثلث مساحت نیم‌دایره کم می‌شود:

$$a_s = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ = \frac{۹}{۲}$$



$$a_A = \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \pi \times ۱^۲ = \frac{۹ - \pi}{۲}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{۹ - \pi}{۲}}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۹ - \pi}{۹}$$

۱۶- می‌دانیم که $B = (B - A) \cup A$ و با استفاده از شکل ، مجموعه‌های A و $B - A$ از هم جدا هستند. بنابراین داریم:

$$P(B) = P(B - A) + P(A)$$

و از آن جا: $P(B - A) = P(B) - P(A)$

